

Planowanie doświadczeń

Wykład z przedmiotu “Metody prognozowania” dla studentów studiów niestacjonarnych

dr inż. Sebastian Skoczypiec

20 grudnia 2008

Proces poznania na drodze doświadczalnej

- pomiary: czynności doświadczalne w celu wyznaczenia wartości wielkości (np. pomiar długości, siły, mocy, temperatury itp.)
 - badania doświadczalne, czyli **wyznaczenie zależności** między wielkościami, przy czym pomiary stanowią pewną część badań doświadczalnych.
-
- **Teoria pomiarów (metrologia)**: zajmuje się podstawami teoretycznymi pomiarów.
 - **Teoria eksperymentu (teoria doświadczeń)**: podstawy teoretyczne badań doświadczalnych.

Teoria eksperymentu: zbiór sposobów mających na celu poznanie zależności między wybranymi wielkościami charakteryzującymi obiekt badań (przedmiot, układ, proces, zjawisko). Obejmuje ona głównie następujące zagadnienia:

- planowanie doświadczeń
- analizę (statystyczną) wyników badań (pomiarów)

- o pozycji kraju decyduje gospodarka, a głównie zdolność do produkcji towarów konkurencyjnych na rynku światowym
- znakomita większość produktów uznanych za wyznaczniki naszej cywilizacji technicznej (od mikroprocesora do statku kosmicznego) to rezultaty badań naukowych i innowacyjnych prac rozwojowych
- w procesie tworzenia nowego produktu największe nakłady finansowe ponoszone są na badania doświadczalne

Teoria eksperymentu powstała pod presją dążeń do poprawy efektywności badań naukowych, (efektywność w tym przypadku rozumiana jest jako stosunek ilości i jakości informacji naukowej do poniesionych kosztów i czasu badań).

JEŻELI na podstawie dotychczasowej wiedzy teoretycznej można jedynie ustalić tzw. czarną skrzynkę, czyli:

- zbiór zmiennych niezależnych zwanych wielkościami wejściowymi $x_k, k = 1, 2, \dots, i$
- zmienną zależną zwaną wielkością wyjściową z
- co oznacza model jakościowy

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Kiedy stosować?

- istnieje uzasadniona potrzeba uzyskania ilościowej funkcji aproksymującej, nazywanej funkcją obiektu badań (np. w postaci wielomianu algebraicznego 2-go stopnia):

$$z = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_ix_i + b_{11}x_1^2 + \dots b_{ij}x_i^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots$$

- funkcja obiektu badań wyznaczana jest na drodze badań doświadczalnych dla ustalonego przez badacza zakresu wartości wielkości wejściowych, który ma postać:

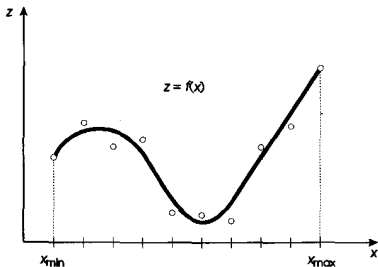
$$x_{kmin} \leq x_k \leq x_{kmax}$$

TO należy stosować standardowe procedury teorii eksperymentu.

Ale czym jest teoria eksperymentu??

Czym jest teoria eksperymentu?

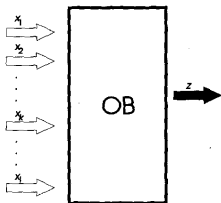
- Tradycyjne badania doświadczalne: jedna wielkość wejściowa $x_1 = x$, czyli należy wyznaczyć funkcję obiektu badań $z = f(x)$.



- miara kosztów i czasu badań to liczba pomiarów n .
- Jeżeli zmierzono wielkość z dla n_1 różnych wartości x to $n = n_1$ (na rys. $n = 10$)

Czym jest teoria eksperymentu?

- Metoda dobra, ale dla prostych obiektów badań.
- Współczesne obiekty badań, zamiast jednej wielkości wejściowej x , charakteryzuje wiele wielkości wejściowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ a każda z nich wpływa istotnie na zmienną z .



- niezbędne jest wyznaczenie na podstawie badań funkcji wielu zmiennych:

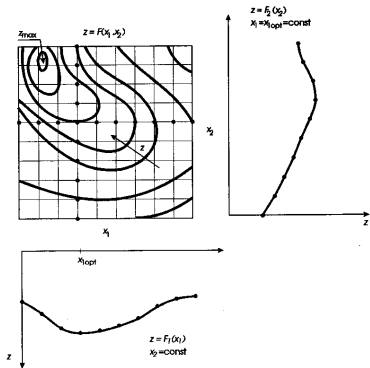
$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Czym jest teoria eksperymentu?

- koncepcja badań wpływ pojedynczych wielkości x_k ($k = 1, 2, 3, \dots, i$) na wielkość wyjściową z (badanie wpływu wielkości wejściowej x_1 przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych, wyznaczając w ten sposób funkcję jednej zmiennej $z = f(x_1)$). Następnie kolejno wyznacza się $z = f(x_2)$, $z = f(x_3)$ itd.
- uzyskuje się w ten sposób mało przydatny zbiór wielu funkcji jednej zmiennej

$$z = f(x_k); \quad k = 1, 2, 3, \dots, i$$

Czym jest teoria eksperymentu?



- Liczba pomiarów utrzymuje się na stosunkowo niskim poziomie:

$$n = n_1 + (n_2 - 1) + \dots + (n_i - 1)$$

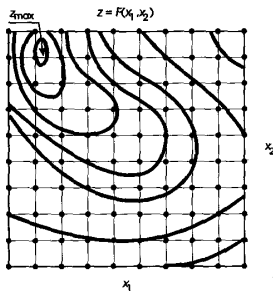
- dla $i = 10$, $n_k = 10$ otrzymujemy $n = 91$

- Pojedyncze funkcje nie zawierają właściwej informacji o badanej rzeczywistości (nie zapewniają możliwości optymalizacji, nie nadają się do sterowania numerycznego)

Czym jest teoria eksperymentu?

- Właściwą funkcję obiektu badań $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, będącą funkcją wielu zmiennych można zawsze wyznaczyć stosując tzw. plan kompletny badań.
- **Plan kompletny badań:** wykonanie pomiarów wielkości z dla zbioru wszystkich wartości n_k wszystkich wielkości wejściowych x_k $k = 1, 2, 3, \dots, i$;

Czym jest teoria eksperymentu?



- Przykład: plan kompletny dla dwóch wielkości wejściowych x_1 i x_2 , który wymaga wykonania $n = 100$ pomiarów wartości wielkości z dla wszystkich wartości x_1 i x_2 :

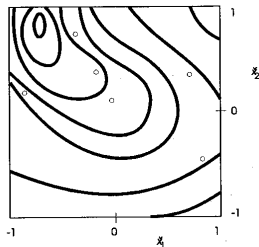
$$n = n_1 \cdot n_2 = 100 \quad \text{gdym} \quad n_1 = n_2 = n_x = 10$$

- Metoda teoretycznie poprawna, niestety nie zawsze wykonalna ze względu na szybko rosnącą liczbę niezbędnych pomiarów z wraz ze wzrostem liczby wielkości wejściowych i (np. dla $i = 10$, $n = 10^{10}$).

Czym jest teoria eksperymentu?

- Kontynuacja tradycyjnych planów doświadczeń, tj. badanie wpływu pojedynczych wielkości wejściowych na wielkość wyjściową, prowadzi do mało przydatnych wyników w sensie poznawczym i praktycznym. Metoda planów kompletnych, pomimo że doskonała w sensie informacyjnym, jest niewykonalna dla bardziej złożonych obiektów badań. Rozwiązanie: **teoria eksperymentu**. Tradycyjnie: **pomiary** \implies **analiza wyników**. Teoria eksperymentu: **cel i metoda anlizy wyników pomiarów** \implies **plan doświadczenia** \implies **pomiary**. Plan doświadczenia może uwzględnić postulat: liczba pomiarów wymaganych jest możliwie mała.

- **Planowanie doświadczeń:** wyznaczenie punktów w przestrzeni i – wymiarowej, których współrzędne, czyli wartości wielkości wejściowych x_1, x_2, \dots, x_i tworzą plan doświadczenia.



x_1	0.75	-0.27	-0.89	-0.10	0.93	0.10
x_2	0.40	0.81	0.10	0.70	-0.55	0

- **Plan doświadczenia:** zbiór n – układów (zbiorów) wartości $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ dla których mierzy się wartości wielkości wyjściowej $z^{(u)}$; $u = 1, 2, \dots, n$

- Teoria eksperymentu ma charakter uniwersalny i tworzone plany doświadczeń stosowane są w różnych dziedzinach wiedzy, stąd w planach używa się bezwymiarowych (normowanych) wartości wielkości wejściowych $\hat{x}_k : \hat{x}_k \in [-\alpha, \alpha]$ gdzie α - ramię gwiazdne planu.

w	\hat{x}_k		
	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1
5	-1,73205	0	0
6	+1,73205	0	0
7	0	-1,73205	0
8	0	+1,73205	0
9	0	0	-1,73205
10	0	0	+1,73205
11	0	0	0

- Wykożystanie planu doświadczenia wymaga przeliczenia wartości normowanych należących do przedziału $[-\alpha, \alpha]$ na wartości rzeczywiste należące do przedziału $[x_{kmin}, x_{kmax}]$.

Istota przydatności teorii eksperymentu w badaniach polega na tym, że spośród wielu planów można wybrać taki, który zapewni jednocześnie:

- wyznaczenie funkcji stanowiącej matematyczny opis obiektu badań i to funkcji z o góry przyjętej postaci
- ograniczenie ogólnej liczby pomiarów n do rozsądnych, raczej małych wartości.

Zagadnienia analizy wyników pomiarów

W teorii eksperymentu równie ważnym zagadnieniem jak planowanie doświadczeń, jest analiza wyników pomiarów (analiza statystyczna), która obejmuje następujące zagadnienia:

- niedokładność pomiarów (oszacowanie zakłóceń losowych, łącznie z błędami środków i metod pomiarowych, które występując w niemal każdym obiekcie badań). Wykorzystuje się tutaj pewne metody i procedury statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa.
- aproksymację (wyznaczenie współczynników i stałych) funkcji obiektu badań.
- ocenę zgodności (adekwatności) wyznaczonej funkcji z wynikami pomiarów oraz istotności wpływu wielkości wejściowych na wielkości wyjściow na tle zakłóceń losowych obiektu. Stosuje się wybrane testy istotności.
- Optymalizację, czyli określenie stanów ekstremalnych obiektu badań za pomocą metod optymalizacji.

Analiza wyników pomiarów określa ostateczny rezultat. Odpowiada na pytanie

“JAK?”,

tworząc podstawy do dalszej analizy merytorycznej odpowiadającej na pytanie

“DLACZEGO??”

- **ETAP I: Charakterystyka obiektu badań (OB):**
 - ustalić stan wiedzy w zakresie tematu, a tym samym określić zagnienia wymagające rozwiązania w drodze doświadczalnej,
 - określić zbiory wielkości charakteryzujących obiekt badań (wielkości wejściowe, wyjściowe, stałe i zakłócające),
 - określić relację między wielkościami, które należy rozpoznać w wyniku badań doświadczalnych.

- **ETAP II: Cel badań doświadczalnych:** określenie szczegółowego celu badań doświadczalnych - jeszcze przed ich zaplanowaniem i realizacją - jest warunkiem niezbędnym jego osiągnięcia. Zwykle wybiera się jeden z następujących celów:
 - wyznaczenie funkcji OB,
 - wyznaczenie stanu ekstremalnego OB
 - weryfikacja istotności wpływu wybranych wielkości wejściowych (x_k) na wielkość wyjściową (z) na tle zakłóceń losowych OB.

- **ETAP III: Metoda badań doświadczalnych.** Osiągnięcie założonego w etapie II celu wymaga:
 - wyboru właściwego planu doświadczenia oraz
 - określenie sposobu jego realizacji i liczby powtórzeń pomiarów.

Równocześnie na tym etapie badań należy szczegółowo określić technikę pomiarów, tj. metody i środki pomiarowe, a tym samym opracować projekt i przygotować stanowisko badawcze.

- **ETAP IV: Realizacja badań doświadczalnych:** na przygotowanym stanowisku badawczym realizuje się pomiary wg przyjętego planu doświadczenia z uwzględnieniem sposobu realizacji i liczby powtórzeń.
- **ETAP V: Analiza wyników pomiarów:** po wykonaniu badań wyniki pomiarów poddaje się analizie statystycznej i merytorycznej. Jeżeli celem jest otrzymanie funkcji OB to analiza obejmuje:
 - niedokładność pomiarów
 - aproksymację (wyznaczenie współczynników założonej funkcji)
 - weryfikację adekwatności
 - weryfikację istotności współczynników funkcji OB
 - optymalizację OB.

- **ETAP VI: Wnioski z badań:** Na podstawie analizy statystycznej i merytorycznej wyników badań należy sformułować wnioski:
 - poznawcze
 - użyteczne (praktyczne)
 - rozwojowe, określające ewentualne kierunki dalszych badań.

Na podstawie informacji o obiekcie badań tworzy się następujące, charakteryzujące go zbiory wielkości

- weściowe: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$;
- wyjściowe: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_w$;
- stałe: $c_1, c_2, c_3, \dots, c_c$;
- zakłócające: $h_1, h_2, h_3, \dots, h_z$;

- Do zbioru wielkości wejściowych (tzw. zmiennych niezależnych) zalicza się arbitralnie te wielkości, których wpływ na wielkości wyjściowe interesuje realizatora badań.
- Muszą one być wzajemnie niezależne i mierzalne.
- Dla każdej wielkości wejściowej określamy zakres wartości, tzn. wartość minimalną i maksymalną:

$$x_{kmin} \leq x_k \leq x_{kmax}; \quad k = 1, 2, \dots, i$$

- Do zbioru wielkości wyjściowych (zmienne zależne) zalicza się wielkości, które zwykle stanowią efekt funkcjonowania obiektu badań.
- Wielkości wyjściowe są mierzalne, a ich wartości będą stanowiły wyniki pomiarów w procesie realizacji badań.
- Oznacza się je symbolem z_1, z_2
- Na każdą z wielkości wyjściowych wpływają wielkości wejściowe.

- Do zbioru **wielkości stałych** zalicza się wielkości, które mogą mieć wpływ na wielkości wyjściowe, ale ich wpływ nie interesuje realizatora badań.
- Określone arbitralnie wartości tych wielkości są stałe w czasie realizacji badań.
- **Zbiór wielkości zakłócających:** wielkości albo znane i mierzalne, lecz celowo pomijane, albo znane, lecz niemierzalne lub też nieznanne, a ich wpływ na wielkości wyjściowe jest losowy.

W zależności do pewnych właściwości wielkości charakteryzujących obiekt badań rozróżnia się następujące obiekty badań:

- statyczne (obiekt badań nie zmienia się w czasie, a szczególnie wielkości wejściowe są niezależne od czasu, ich wartościami można swobodnie sterować),
- dynamiczne (obiekt zmienia się w czasie).

Mierzalne, czyli takie których wartości da się określić ilościowo w postaci liczby i jednostki miary.

Istotnym zabiegiem jest tzw. dekompozycja obiektu badań, polegająca na utworzeniu tylu obiektów badań, ile jest wielkości wyjściowych, przy czym każdy obiekt charakteryzowany jest tylko jedną wielkością fizyczną. Prowadzi to do relacji:

$$F_{z_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1) = 0, \quad F_{z_2}(x_1, x_2, \dots, x_n, z_2) = 0$$

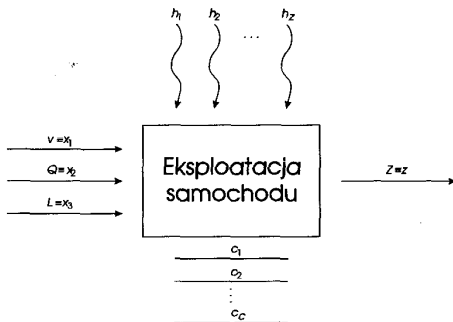
$$F_{z_w}(x_1, x_2, \dots, x_n, z_w) = 0$$

Należy podkreślić formalność dekompozycji. Można i należy mierzyć w wielkości wyjściowych w trakcie realizacji.

Obiekt badań - przykład

Obiekt badań: eksploatacja nowego typu samochodu.

Cel badań: uzyskanie informacji o wpływie warunków eksploatacji tego samochodu na zużycie paliwa.



- Do zbioru wielkości wejściowych zalicza się wybrane wielkości stanowiące warunki eksploatacji tego samochodu np.: prędkość jazdy v , obciążenie samochodu (ładunek) Q , liczbę oktanową paliwa L :
 - $x_1 = v \text{ km/h}$
 - $x_2 = Q \text{ kg}$
 - $x_3 = L$

Przyjmuje się zakresy x_1, x_2, x_3 w zależności od przewidywanych warunków eksploatacji tego samochodu, np.

- $30 \text{ km/h} \leq x_1 \leq 90 \text{ km/h}$
- $100 \text{ kg} \leq x_2 \leq 1000 \text{ kg}$
- $94 \leq x_3 \leq 98$

Wielkość wyjściowa: zużycie paliwa: $z_1 = z = Z / 100 \text{ km}$. Może też być kilka wielkości wyjściowych.

Do zbioru **wielkości stałych** zaliczamy:

- typ samochodu (jego parametry konstrukcyjne): c_1
- ciśnienie w oponach: c_2
- wysokość bieżnika: c_3

tzn. parametry konstrukcyjne, ustalona wartość ciśnienia w oponach, wysokość bieżnika nie mogą się znacząco zmienić w czasie realizacji badań.

Do zbioru **wielkości zakłócających** zaliczamy:

- warunki atmosferyczne: h_1
- losowe sytuacje drogowe: h_2
- błędy pomiaru zużycia paliwa: h_3

Przyjęcie zbiorów wielkości charakteryzujących obiekt badań powinno być dodatkowo uzupełnione określeniem relacji między wielkościami wejściowymi a wyjściowymi, które interesują realizatora badań. Można wyróżnić dwa typy:

- 1 funkcja obiektu badań (FOB): $z = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$, czyli celem badań jest określenie związków między wszystkimi wielkościami wejściowymi a wielkością wyjściową,
- 2 pojedyncze funkcje: $z_i = f_i(x_1)$; $x_k = const.$, czyli celem badań jest określenie związków pomiędzy każdą z wielkości wejściowych a wielkością wyjściową.

Określenie charakterystyki obiektu badań stanowi podstawę do wyboru celu badań doświadczalnych. Można określić następujące ogólne cele:

- 1 weryfikacja istotności wpływu wielkości wejściowych na wielkość wyjściową
- 2 wyznaczenie stanu ekstremalnego
- 3 wyznaczenie funkcji OB

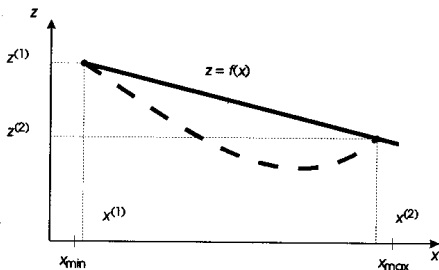
Wybór celu 3 pozwala na uzyskanie pełnej informacji o obiekcie badań.

Wyznaczenie funkcji obiektu badań oznacza, że z badań doświadczalnych uzyskuje się wartości współczynników (stałych) funkcji opisującej zachowanie się obiektu badań w przyjętych zakresach x_k (x_{kmin}, x_{kmax}). Dysponując wyznaczoną z badań funkcją można:

- obliczyć wartość wielkości wyjściowej (z) dla zbioru dowolnych (z przyjętych zakresów) wartości wielkości wejściowych (x_k)
- analitycznie wyznaczyć ekstremum (minimum lub maksimum) funkcji (cel b)
- stwierdzić charakter i istotność wpływu każdej z wielkości wejściowych na wielkość wyjściową (cel 1)
- zastosować funkcję do numerycznego sterowania obiektem badań.

Cel badań doświadczalnych

- Konsekwencją przyjęcia, jako celu badań funkcji OB jest konieczność założenia (przed badaniami) szczegółowej postaci funkcji.
- Dobiera się postać funkcji dla nieznaney przed badaniami rzeczywistości.



Przykład założenia niewłaściwej funkcji obiektu badań (krzywa przerywana - nieznaną rzeczywistość)

Opracowano na podstawie:

Roma Górecka "Teoria i technika eksperymentu", Wydawnictwo PK, Kraków
1995 r.

Dziękuję za uwagę!!!